

Propozycja odwzorowania dla Ukrainy ze stałą skalą na granicy państwa



Andrzej Głazewski¹ Yuliia Holubinka²
Paweł Pędzich³ Mariana Yurkiv⁴

^{1,3} Zakład Kartografii, Wydział Geodezji I Kartografii,
Politechnika Warszawska

^{2,4} Wydział Kartografii i Modelowania Geoprzestrzennego,
Politechnika Lwowska Uniwersytet Narodowy



V Akademia Kartografii i Geoinformatyki
Wrocław, maj 2026



Pafnutij Lwowicz Czebyszew - Пафнутий Львович Чебышёв
(1821 – 1894)

Twierdzenie Czebyszewa

Czebyszew sformułował kryterium (ściśle związane z jego twierdzeniem o odwzorowaniach konforemnych):

Najlepsze odwzorowanie oryginału jest wtedy gdy logarytm skali zniekształceń długości posiada najmniejszą oscylację oraz logarytm skali maksymalnej i logarytm skali minimalnej różnią się jak najmniej od logarytmu skali głównej mapy:

$$\ln m_{max} - \ln m_{min} = \textit{minimum}$$

$$\ln m_{max} + \ln m_{min} = 2 \ln m_0 = 0$$

Twierdzenie Czebyszewa

- **W odwzorowaniach konforemnych kryterium to jest spełnione gdy na brzegu obszaru skala zniekształceń długości jest stała.**
- Twierdzenie zostało dowiedzione w 1894 przez jego studenta D.A. Grave.

Metodyka badań – aproksymacja funkcji odwzorowawczej

Przyjęte odwzorowanie konforemne aproksymowano za pomocą szeregu potęgowego zmiennej zespolonej:

$$x + iy = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + ib_k)(\xi + i\eta)^k$$

w którym a_k, b_k są współczynnikami rzeczywistymi oraz $\xi = q - q_0$ i $\eta = \eta_0$ są współrzędnymi izometrycznymi

Metodyka badań – proces wyznaczania elementów metrycznych odwzorowania



Metodyka badań – proces wyznaczenia elementów metrycznych odwzorowania

Dla każdego punktu tworzony jest układ wielomianów harmonicznych wg zależności rekurencyjnej

Dla każdego punktu brzegowego obszaru obliczana jest wartość funkcji r

Dla każdego punktu brzegowego obszaru układane są równania następującego typu:

$$\sum_{k=0}^N \hat{a}_k(\Psi_k)_i + \sum_{k=1}^N \hat{b}_k(\theta_k)_i - \ln r_i - \ln m = 0$$

$i = 1, 2, 3, 4, \dots, M$

Przyjmuje się określoną stałą wartość skali m na brzegu obszaru, np. $m=1$.

Metodyka badań – proces wyznaczenia elementów metrycznych odwzorowania

↓

Układ równań rozwiązuje się metodą najmniejszych kwadratów wyznaczając współczynniki \hat{a}_k, \hat{b}_k .

↓

W węzłach założonej dla danego obszaru siatki kartograficznej obliczamy $\ln \mu$ oraz kąt zbieżności południków γ według wzorów (25) i (26).

↓

Metodyka badań – proces wyznaczania elementów metrycznych odwzorowania



Dla każdego punktu węzłowego siatki kartograficznej obejmującej dany obszar układamy po dwa równania:

$$\sum_{k=1}^N k a_k (\Psi_{k-1})_i - \sum_{k=1}^N k b_k (\theta_{k-1})_i = \mu_i \cos \gamma_i$$
$$\sum_{k=1}^N k a_k (\theta_{k-1})_i + \sum_{k=1}^N k b_k (\Psi_{k-1})_i = \mu_i \sin \gamma_i$$



Rozwiązujemy układ równań metodą najmniejszych kwadratów otrzymując współczynniki liczbowe a_k, b_k , które stosujemy w równaniach (29) do wyznaczenia współrzędnych prostokątnych płaskich odwzorowania Czebyszewa.



Stop

Metodyka badań – brzeg obszaru

A



B



C



● centre of Ukraine
○ points on ellipse
0 100 200 km

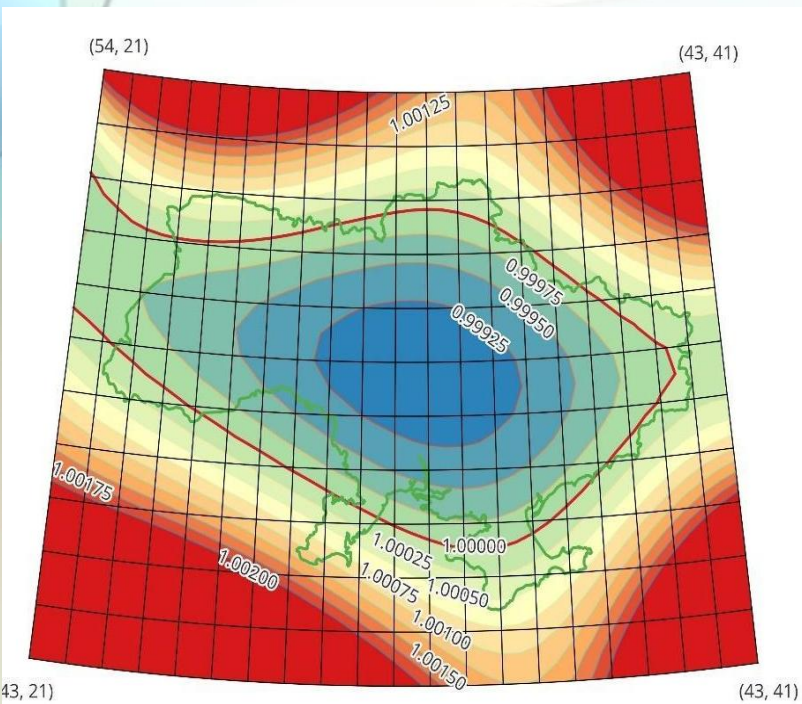
Metodyka badań – wyznaczenie środka obszaru



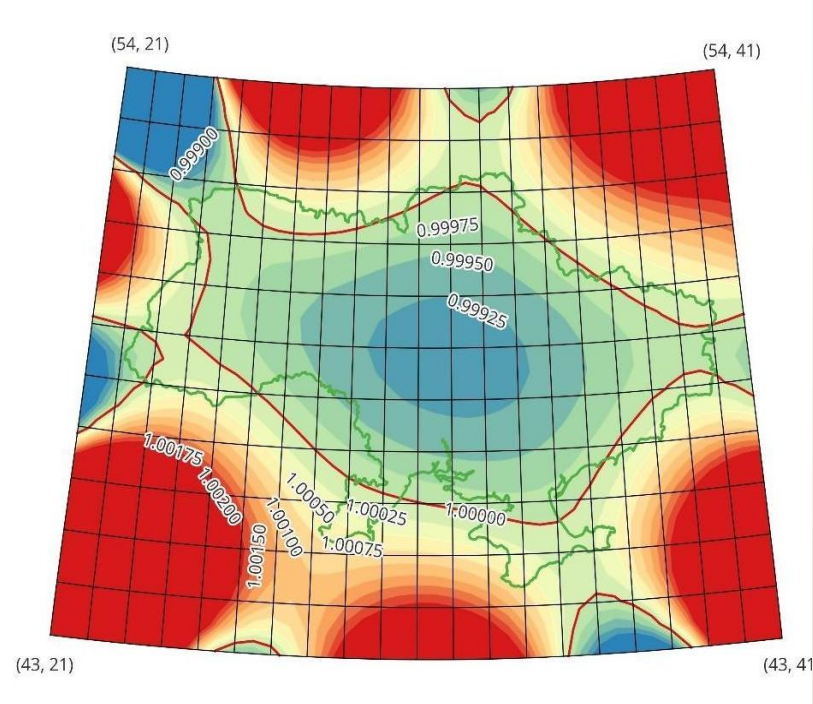
Metodyka badań – aproksymacje funkcji

- Aproksymacje funkcji skali i funkcji odwzorowawczych: szereg potęgowej zmiennej zespolonej, wielomiany harmoniczne, metoda najmniejszych kwadratów
- Poszukiwanie optymalnego rozwiązania: błędy średnie, zerowanie się wyznacznika, hipoteza zerowa, ocena wizualna wyników
- Porównanie zniekształceń z innymi odwzorowaniami: miary średniokwadratowe Airy i Airy-Kawrajskiego

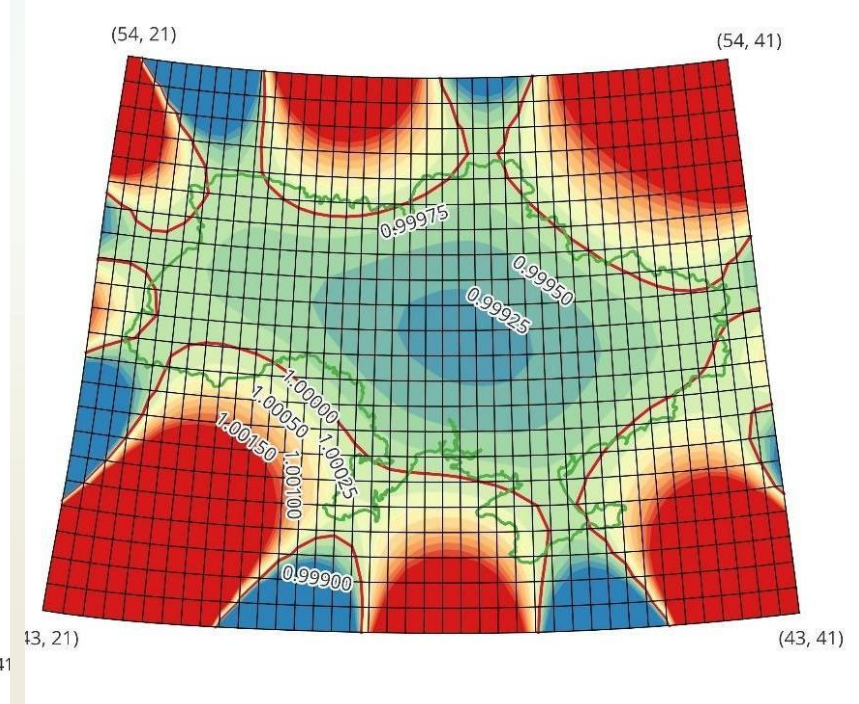
Wyniki – wpływ zwiększania stopnia wielomianu na kształt ekwiformat



A

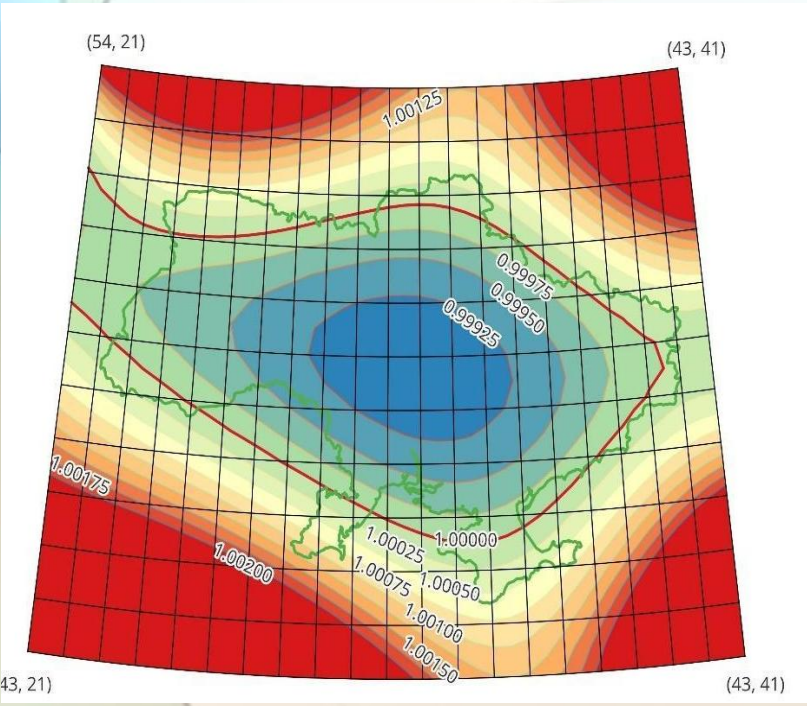


B

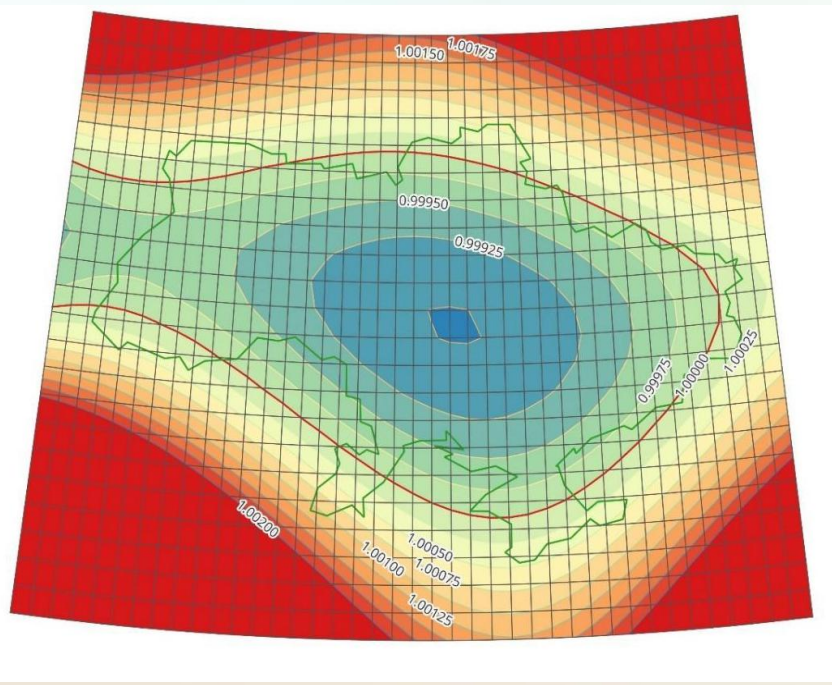


C

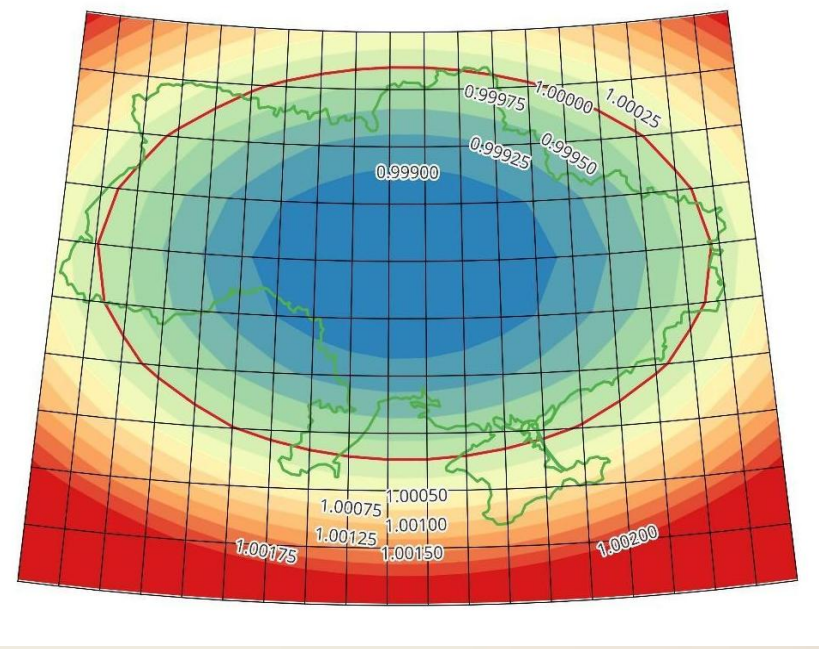
Wyniki – wpływ kształtu granicy na kształt ekwiformat



E



F



G

Wyniki – porównanie uzyskanych zniekształceń z odwzorowaniem stożkowym Eulera

- Średniokwadratowe zniekształcenie długości dla opracowanego odwzorowania wg miar:
- Airy = 0.00036846
- Airy-Kawrajski = 0.00036853
- A w odwzorowaniu Eulera:
- Airy = 0.00093031
- Airy-Kawrajski = 0.00093079

Wnioski (1)

- Skala na granicy obszaru w opracowanych odwzorowaniach jest zachowana z pewnym przybliżeniem.
- Gdy granica jest bardziej regularna, jak w przypadku przybliżenia eliptycznego, uzyskujemy większe podobieństwo kształtu ekwideformat do granicy.
- Przyjęcie wyższych stopni wielomianu powoduje, że kształt izolinii jest bliższy kształtowi granicy.
- Przy wysokich stopniach wielomianu, izolinie ulegają rozerwaniu i mają tendencję do tworzenia lokalnych minimów lub maksimów.

Wnioski (2)

- Globalne minimum skali zniekształceń zawsze znajduje się w środku obszaru.
- W pobliżu granicy obszaru mamy maksymalną skalę zniekształceń.
- Odwzorowanie Czebyszewa dla Ukrainy to projekcja, którą można traktować jako referencyjną do porównania z innymi odwzorowaniami jednostrefowymi tego obszaru.
- Charakteryzuje się ono znacznie niższymi zniekształceniami od innych projekcji. Np. zniekształcenia w odwzorowaniu Czebyszewa są prawie trzy razy mniejsze niż w odwzorowaniu Eulera dla Ukrainy.

Dziękujemy za uwagę

Andrzej Głazewski ¹ Yuliia Holubinka ²
Paweł Pędzich ³ Mariana Yurkiv ⁴

^{1,3} Zakład Kartografii, Wydział Geodezji I Kartografii,
Politechnika Warszawska

^{2,4} Wydział Kartografii i Modelowania Geoprzestrzennego,
Politechnika Lwowska Uniwersytet Narodowy

andrzej.glazewski@pw.edu.pl Yuliia.I.Holubinka@lpnu.ua
pawel.pedzich@pw.edu.pl Mariana.I.Yurkiv@lpnu.ua